Marius BURTEA Georgeta BURTEA

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a X-a

Trunchi comun

EDITURA CARMINIS

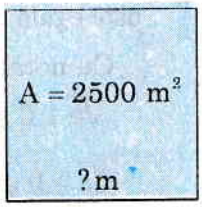
CUPRINS

CAPITOLUL I. NUMERE REALE

1 RADICALI

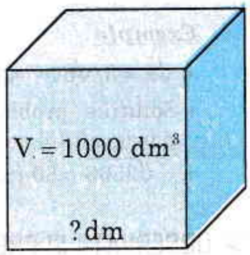
1.1. RADICALUL DE ORDINUL n DINTR-UN NUMĂR REAL POZITIV, $n \in \{2, 3\}$

Să analizăm următoarele situații-problemă:



1. Un teren de formă pătratică are aria egală cu 2500 m^2. Câți metri are o latură a terenului?

2. Un vas în formă de cub are volumul de 1000 dm^3. Câți decimetri măsoară o latură a vasului?



Pentru a răspunde la întrebările ridicate, să notăm cu x lungimea laturii terenului și cu y lungimea laturii vasului. Astfel, modelul matematic al acestor probleme îl reprezintă ecuațiile $x^2 = 2500$, respectiv $y^3 = 1000$ care se scriu sub forma $x^2 - 2500 = 0$ (1), $y^3 = 1000$ (2).

Soluțiile lor se găsesc relativ ușor, observând că $2500 = 50^2$ și $1000 = 10^3$.

Se obține $x = 50(m)$ și $y = 10(dm)$.

Este important de observat că soluția ecuației (1) reprezintă un număr real pozitiv a cărui putere a doua este 2500 și care în clasele anterioare s-a notat $50 = \sqrt{2500}$. Soluția ecuației (2) este un număr real pozitiv a cărui putere a treia este 1000.

În general, este vorba de rezolvarea unei ecuații de forma $x^n - a = 0$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a > 0$.

Admitem fără demonstrație următorul enunț:

> **TEOREMA 1**
>
> Ecuația $x^n - a = 0$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a \in (0, +\infty)$ are o singură soluție reală pozitivă.

Altfel spus, teorema afirmă că pentru orice număr real pozitiv „a" și orice număr natural $n \geq 2$, există un unic număr real pozitiv a cărui putere a n-a este egală cu a.

DEFINIȚII

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv și $n \in \{2, 3\}$.

- Se numește **radicalul de ordinul 2** (sau rădăcina pătrată) din numărul pozitiv a numărul real pozitiv a cărui putere a doua este egală cu a și se notează $\sqrt[2]{a}$ sau $\sqrt{a}$.
- Se numește **radicalul de ordinul 3** (sau rădăcina cubică) din numărul pozitiv a numărul real pozitiv a cărui putere a treia este egală cu a și se notează cu $\sqrt[3]{a}$.

Cu notațiile adoptate se poate scrie:

$$\sqrt{a} \geq 0 \text{ și } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ \forall a \in (0, +\infty);$$

$$\sqrt[3]{a} \geq 0 \text{ și } \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a,\ \forall a \in (0, +\infty).$$

Radicalii au fost cunoscuți încă din antichitate. Babilonienii aveau tabele cu rădăcinile pătrate ale numerelor.

Indienii (sec. IX) rezolvau ecuația de gradul doi și cunoșteau faptul că nu se poate calcula rădăcina pătrată a unui număr negativ.

Aceștia puteau calcula rădăcina de ordinul 3 cu ajutorul unor formule de aproximație.

Germanul Michael STIFEL (1487-1567) utiliza radicalul unui număr până la ordinul 7.

Christoph RUDOLF (sec. XVI) folosea următoarele simboluri: √√ pentru $\sqrt[2]{\ }$; √√√ pentru $\sqrt[3]{\ }$ etc.

Notația actuală a radicalului √ apare din 1544 în lucrările lui Michael STIFEL.

Exemple

- $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[2]{289} = 17$; $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$.
- Soluțiile problemelor enunțate la începutul paragrafului se scriu sub forma: $x = \sqrt[2]{2500} = 50\ (\text{m})$, $y = \sqrt[3]{1000} = 10\ (\text{dm})$.

OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI

1. Dacă $a = 0$, prin definiție $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt[3]{0} = 0$.
2. În determinarea numerelor de forma $\sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, trebuie avut în vedere că indiferent de semnul lui x, $\sqrt{x^2} \geq 0$. Astfel, avem $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{8^2} = 8 = |-8|$.

   Așadar, vom scrie $\sqrt{x^2} = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Problemă rezolvată

Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $E = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$; **b)** $F = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^4}$.

Soluție

a) Expresia E se scrie succesiv astfel:

$$E = \left|1 - \sqrt{3}\right| + \left|2 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1.$$

b) $F = |x + 1| + x^2 = \begin{cases} x + 1 + x^2, & \text{dacă } x \geq -1 \\ -x - 1 + x^2, & \text{dacă } x < -1 \end{cases}$

1.2. RADICALUL DE ORDINUL 3 AL UNUI NUMĂR NEGATIV

DEFINIȚIE

• Se numeşte **radicalul de ordin 3** din numărul real negativ a numărul real negativ a cărui putere a treia este egală cu a.

Pentru acesta se foloseşte notația $\sqrt[3]{a}$ şi au loc relațiile:

$$\sqrt[3]{a}<0,\ \left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a \text{ şi } \sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{-a},\ \forall a<0.$$

Exemple

• $\sqrt[3]{-27}=-3;\ \sqrt[3]{-0,125}=-0,5;\ \sqrt[3]{-\frac{8}{343}}=-\frac{2}{7}$.

• Ecuația $x^3+216=0$ are soluția reală negativă $x=\sqrt[3]{-216}=-6$.

Problemă rezolvată

Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $E(x)=\sqrt{2x^2+5x-3}+\sqrt[3]{x-2}$; **b)** $F(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-1}}$.

Soluție

a) Pentru existența expresiei $E(x)$ se pune condiția de existență pentru fiecare radical. Astfel, radicalul de ordinul 2 există dacă $2x^2+5x-3\geq 0$, iar radicalul de ordinul 3 există pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Rezolvând inecuația de gradul al doilea se obține soluția problemei: $x\in(-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

b) Condițiile de existență pentru $F(x)$ sunt: $9-x^2\geq 0$ şi $x-1\neq 0$ (condiția de existență a fracției). Se obține $x\in[-3,3]\setminus\{1\}$.

APROXIMAREA UNOR NUMERE REALE SCRISE CU AJUTORUL RADICALILOR DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

În ciclul gimnazial s-a învățat algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv, iar în clasa a IX-a s-au învățat modalități de aproximare rațională a numerelor reale.

Pentru calculul numerelor iraționale de forma $\sqrt[3]{a}$, $a\in\mathbb{Q}$ se foloseşte calculatorul de buzunar sau se fac aproximări raționale aşa cum se va vedea în exemplul următor.

≈

Babilonienii aproximau numerele iraționale cu ajutorul mediilor aritmetice şi geometrice. De exemplu, foloseau formule de genul $\sqrt{a^2-b}\approx a-\frac{b}{2a}$.

În Mesopotamia, în unele probleme apar aproximări de forma:

$\sqrt{2}\approx 1+\frac{25}{60}\approx 1,41$

$\sqrt{3}\approx 1+\frac{45}{60}=1,75$

Exemplu

• Să se găsească o valoare aproximativă a numărului $\sqrt[3]{2}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-1}, respectiv 10^{-2}.

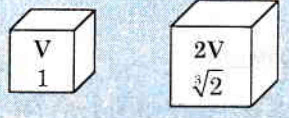
Soluție

Deoarece $1=1^3<2<2^3=8$, rezultă că $1<\sqrt[3]{2}<2$ și ca urmare 1, respectiv 2 sunt valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos cu o eroare mai mică decât 1 ale numărului $\sqrt[3]{2}$.

Pentru a găsi aproximările raționale cu o eroare mai mică decât 10^{-1} ale lui $\sqrt[3]{2}$ se procedează astfel. Se scrie șirul de numere: 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.

$\sqrt[3]{2}$

Numărul $\sqrt[3]{2}$ apare în problema celebră numită „duplicarea cubului": „fiind dat un cub cu latura 1, să se construiască cubul care are volumul dublu".



Se caută în acest șir două numere consecutive astfel încât cubul acestor numere să încadreze pe 2. Pentru o căutare mai eficientă se alege numărul din mijloc. Se obține $1,5^3=3,375>2$. Rezultă că perechea de numere căutată va fi printre numerele 1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Calculăm $1,2^3=1,728$ care este mai mic decât 2 și ca urmare $1,1^3$ va fi de asemenea mai mic decât 2.

Calculăm $1,3^3=2,197>2$ și astfel am obținut că $1,2<\sqrt[3]{2}<1,3$.

Așadar, 1,2 și 1,3 sunt aproximările raționale prin lipsă, respectiv prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-1} ale numărului real $\sqrt[3]{2}$.

Pentru a obține aproximări raționale cu o eroare mai mică decât 10^{-2} se consideră șirul de numere: 1,21; 1,22; 1,23; 1,24; 1,25; ...; 1,29.

Se procedează ca la cazul anterior și se găsește că $1,25<\sqrt[3]{2}<1,26$, iar aproximările căutate sunt 1,25 respectiv 1,26.

Procedeul poate continua pentru a găsi aproximări raționale ale lui $\sqrt[3]{2}$ cu o eroare oricât de mică se vrea.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{2^6}$, $\sqrt{4^{12}}$, $\sqrt{(-6)^{10}}$, $\sqrt{(-3)^8}$;

b) $\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt[3]{-343}$, $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$;

c) $\sqrt{\frac{36}{49}}$, $\sqrt[3]{-\frac{216}{125}}$, $\sqrt[3]{512^{-1}}$, $\sqrt[3]{-0,008}$.

E2. Să se scrie cu ajutorul radicalilor soluțiile problemelor:

a) Pătratul cu aria de 1296 m^2 are latura de ... m.

b) Pătratul cu aria de 28,09 m^2 are latura de ... dm.

c) Un cub cu volumul de 3,375 m^3 are latura de ... dm.

d) În trei rezervoare cubice cu volumele egale încap $\frac{2744}{9}$ litri de apă. Atunci latura unui rezervor este de ... dm.

E3. Pentru ce valori ale lui x au loc egalitățile:

a) $\sqrt[2]{x^2}=x$; b) $\sqrt{x^2}=-x$;

c) $\sqrt{x^4}=x^2$; d) $\sqrt[3]{x^3}=x$;

e) $\sqrt[3]{x^3}=-x$; f) $\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}}=-x$?

E4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie definite expresiile:

a) $\sqrt{x-3}$; b) $\sqrt[3]{5-8x}$;

c) $\sqrt{3x^4}$; d) $\sqrt{-x}$;

e) $\sqrt[3]{(3+x)^2}$; f) $\sqrt[3]{27x^{-2}}$;

g) $\sqrt{(-x+5)^{-1}}$; h) $\sqrt{4-x^2}-3\sqrt[3]{x+2}$;

i) $\sqrt{4x^2-4x+7}-\sqrt[3]{(x-1)^{-1}}$.

E5. Să se reprezinte grafic funcția $f : D \to \mathbb{R}$, dată prin:

a) $f(x)=\sqrt{(4-x)^2}$, $x \in [0,6]$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{(2x-3)^3}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x)=\sqrt{(6-3x)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^3}$, $x \in \mathbb{R}$.

E6. Se dau mulțimile:

$$A=\left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt[3]{\frac{5x-1}{x-2}} \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$B=\left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$.

E7. Să se demonstreze că numerele $\sqrt[3]{2}$ și $\sqrt[3]{5}$ sunt iraționale.

APROFUNDARE

A1. Să se determine partea întreagă a numerelor: $\sqrt{1396}$; $\sqrt[3]{45}$; $-\sqrt[3]{205}$; $\sqrt[2]{456}$; $\sqrt[3]{900}$; $\sqrt[3]{-35}$; $-\sqrt{5240}$.

A2. Să se compare numerele reale:

a) $\left[\sqrt{104}\right]$ și $\left[\sqrt[3]{625}\right]$;

b) $\left[\sqrt[3]{-15}\right]$ și $\left[-\sqrt[2]{14}\right]$;

c) $\left\{\sqrt{31,36}\right\}$ și $\left\{-\sqrt{0,1225}\right\}$.

A3. Să se aproximeze prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 1; 0,1, respectiv 0,01 numerele: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[2]{32}$, $\sqrt[3]{10}$.

A4. Pentru ce valori ale lui x sunt definite expresiile:

a) $\sqrt[2]{\dfrac{3-x}{x+4}}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{9-x^2}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{2x^2-6x}{x-4}}$; d) $\sqrt{\dfrac{-3x^2}{x^2-16}}+\sqrt[3]{\dfrac{x}{2-x}}$;

e) $\sqrt{\dfrac{9-x^2}{|x|}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2-|x|}}$?

A5. Folosind semnul funcțiilor trigonometrice să se determine domeniul maxim de definiție D al funcției $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{\sin x}$, $D \subset [0,2\pi]$;

b) $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $D \subset [0,2\pi]$;

c) $f(x)=\sqrt{1-\sin x}$, $D \subset \mathbb{R}$;

d) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x-1}}$, $D \subset \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A6. Dacă $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$\sqrt{16(y-2x)^2}+2\sqrt[3]{(2y-3x)^3}-\sqrt{\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2}.$$

A7. Fie $a \in [-1, 1]$, $b \in [-3, 4]$ și

$E=\sqrt{(a+b+4)^2}+\sqrt{(2a+b+5)^2}$,

$F=\sqrt{(a-3b-10)^2}-\sqrt{(4a-b-7)^2}$

iar $s=E-F$.

Alegeți varianta corectă:

a) $s \notin \mathbb{Q}$; b) $s \in \mathbb{N}$; c) $s \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$;

d) $s=-3$.

A8. Să se reprezinte grafic funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că:

a) $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{(1-x)^3}$;

b) $f(x)=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2}$;

c) $f(x)=\sqrt{(x+1)^4}+\sqrt{(x+1)^2}$.

A9. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m - 2}$;

b) $g : [0+\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{(m^2+3m)x^2 - 2(m+3)x + 2}$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2+mx+m}}$.

1.3. PROPRIETĂȚI ALE RADICALILOR

Folosind definiția radicalului de ordinul 2, respectiv 3 și unele proprietăți ale puterilor cu exponent întreg, se vor pune în evidență o serie de proprietăți specifice radicalilor.

Să amintim următoarea proprietate a puterilor cu exponent natural care va fi folosită în demonstrarea unor proprietăți ale radicalilor.

„Dacă $a, b \in [0, +\infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = b^n$ dacă și numai dacă $a = b$". (*)

P1. Radicalul produsului

a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ \forall\, a, b \in [0, +\infty)$;

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b},\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

a) Fie $x = \sqrt{ab}$ și $y = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Rezultă că $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $x^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$, $y^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Așadar, $x^2 = y^2$ și conform proprietății (*), dată mai sus, se obține că $x = y$, adică $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

b) Temă. ■

Exemple

a) $\sqrt{\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{81}{625}} = \sqrt{\dfrac{1}{16}} \cdot \sqrt{\dfrac{81}{625}} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{9}{25} = \dfrac{9}{100}$;

b) $\sqrt[3]{(-343) \cdot 216} = \sqrt[3]{(-343)} \cdot \sqrt[3]{216} = (-7) \cdot 6 = -42$.

OBSERVAȚIE

- Proprietatea P1 poate fi generalizată pentru un număr finit de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Astfel au loc egalitățile:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_m},\ \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 0.$$

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m} = \sqrt[3]{a_1} \cdot \sqrt[3]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[3]{a_m},\ \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}.$$

P2. Puterea unui radical

a) $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$, $\forall\ a \in [0, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$;

b) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^m = \sqrt[3]{a^m}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Demonstrație

Se aplică generalizarea proprietății P1 pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a$.

Exemple

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[3]{9}$; b) $\left(\sqrt{3^3}\right)^2 = 3^3$; c) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$.

P3. Radicalul raportului

a) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\forall\ a \in [0, +\infty)$, $b \in (0, +\infty)$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Demonstrație

(Temă)

Exemple

a) $\sqrt{\dfrac{169}{961}} = \dfrac{\sqrt{169}}{\sqrt{961}} = \dfrac{13}{31}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{-729}{512}} = \dfrac{\sqrt[3]{-729}}{\sqrt[3]{512}} = -\dfrac{9}{8}$.

P4. Scoaterea unui factor de sub radical

a) $\sqrt{a^{2k} \cdot b} = |a|^k \cdot \sqrt{b}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$;

b) $\sqrt[3]{a^{3k} \cdot b} = a^k \cdot \sqrt[3]{b}$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Într-adevăr, $\sqrt{a^{2k} \cdot b} = \sqrt{\left(a^k\right)^2} \cdot \sqrt{b} = \left|a^k\right| \cdot \sqrt{b} = |a|^k \cdot \sqrt{b}$ și

$\sqrt[3]{a^{3k} \cdot b} = \sqrt[3]{\left(a^k\right)^3} \cdot \sqrt[3]{b} = a^k \cdot \sqrt[3]{b}$.

Exemple

a) $\sqrt{2^7 \cdot 3} = \sqrt{2^6 \cdot 2 \cdot 3} = 2^3 \cdot \sqrt{6}$; b) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$.

OBSERVAȚIE

- Citind din membrul al doilea egalitățile a), b) din proprietatea P4 se obține modalitatea de introducere a unui factor sub radical.

Exemple

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; b) $-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{-24}$.

P5. Compararea radicalilor:

a) Dacă $a, b \in [0, +\infty)$, atunci $\sqrt{a} \le \sqrt{b} \Leftrightarrow a \le b$.

b) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt[3]{a} \le \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a \le b$.

Demonstrație

Într-adevăr, pentru $a, b \in [0, +\infty)$, luând $\sqrt[n]{a} = x$, $\sqrt[n]{b} = y$, unde $n \in \{2, 3\}$, rezultă $x^n = a$ și $y^n = b$.

Din echivalența $x \le y \Leftrightarrow x^n \le y^n$ se obține $a \le b$ ceea ce justifică proprietatea pentru numere pozitive.

Pentru indicele $n = 3$ și a, b negative sau de semne contrare se demonstrează analog folosind scrierea $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x}$. ■

1.4. OPERAȚII CU RADICALI

Examinând proprietățile radicalilor de ordinul n, $n \in \{2, 3\}$ se constată că ele descriu totodată anumite reguli de calcul cu radicali. Astfel, au loc următoarele operații:

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $a, b \in [0, +\infty)$,

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, $a, b \in \mathbb{R}$ *(înmulțirea radicalilor)*

2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a \in [0, +\infty)$, $b \in (0, +\infty)$;

$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \ne 0$ *(împărțirea radicalilor)*

3. $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $a \in (0, +\infty)$;

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^m = \sqrt[3]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}^*$ *(ridicarea la putere)*

4. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, $a, b \in [0, +\infty)$

$a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$, $a, b \in \mathbb{R}$. *(înmulțirea unui radical cu un număr – introducerea factorilor sub radical)*

Unele reguli de calcul cu puteri și radicali au fost folosite încă din secolul al XIV-lea.

AL KAȘI a stabilit regula aducerii radicalilor la același ordin și folosea formule de tipul:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m \cdot b^n}$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze, scriind rezultatul sub formă mai simplă:
$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} : \sqrt[3]{2}$.

Soluție

Se înmulțesc, respectiv se împart radicalii de același ordin și se obține $\sqrt[3]{\frac{16}{2}} \cdot \sqrt{36} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12.$

2. Să se efectueze înmulțirile:

a) $4\sqrt{5}$; **b)** $-3\sqrt[3]{2}$; **c)** $-2\sqrt{3}$; **d)** $a\sqrt{b}$.

Soluție

a) Avem $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$;

b) $-3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{-54}$;

c) $-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}$;

d) $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & a \geq 0 \\ -\sqrt{(-a)^2 b}, & a < 0 \end{cases}$.

3. Să se scoată factorii de sub radical:

a) $\sqrt[3]{(-2)^5 \cdot 3^4}$; **b)** $\sqrt{a^7 b^2}$.

Soluție

a) Avem succesiv: $\sqrt[3]{(-2)^5 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot 3^3 \cdot 3} = -2 \cdot 3\sqrt[3]{12} = -6\sqrt[3]{12}$;

b) $\sqrt{a^7 b^2} = \sqrt{a^6 \cdot ab^2} = a^3 |b| \sqrt{a}$.

OBSERVAȚII

- Adunarea radicalilor nu are proprietăți speciale.
  Trebuie avut în vedere că $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$, $n \in \{2, 3\}$.
- Dacă $a < 0$, $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.
  Dacă $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^{2n} b} = |a|^n \sqrt{b}$.
- Media geometrică a două, respectiv trei numere reale pozitive este $m_g = \sqrt{ab}$, respectiv $m_g = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$.

1.5. RAȚIONALIZAREA NUMITORILOR

Să considerăm expresiile $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ și $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$ care prezintă radicalul la numitori. Se pune problema scrierii acestor expresii astfel încât să nu mai conțină radicalul la numitori. Cum se va proceda?